¿Qué tan singular puede ser una curva algebraica plana?

Brian Harbourne

Department of Mathematics
University of Nebraska-Lincoln

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

22 de Noviembre, 2019

Curvas algebraicas planas

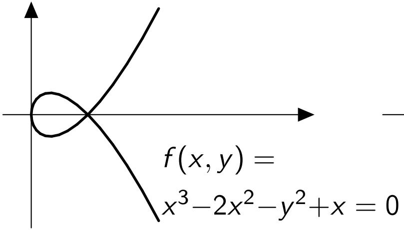
Una curva algebraica plana: el conjunto de ceros de un polinomio $f(x, y)$ de cuadrado libre,

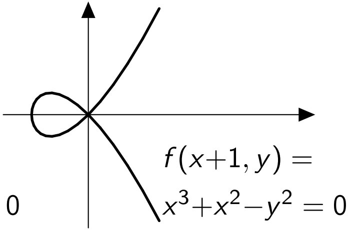
$$C : f(x, y) = 0 \text{ en } \mathbb{C}^2.$$

Definición: $\deg C = \text{ grado de } C = \deg f$.

Se tiene que C es irreducible si f lo es. La multiplicidad $\mathrm{mult}_C(p)$ de un punto p es el número de veces que la curva pasa a través del punto. Cuando se expresa en coordenadas centradas en un punto p, $\mathrm{mult}_C(p)$ es el menor grado de los monomios que aparecen en f.

Se dice que un punto p es *singular* si $\mathrm{mult}_C(p) > 1$:





Subsemigrupos de curvas

Sea $Z = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{C}^2$, y $M_Z = \{(d, m_1, \ldots, m_s) :$
$\exists\ C$ con $\deg C = d, \text{mult}_C(p_i) \geq i, i = 0, \ldots, s\} \subset \mathbb{Z}^{s+1}$.
Nota: además en M_Z corresponde a multiplicación de los polinomios.

Problema abierto: ¿Para cuál Z es M_Z finitamente generado?

Para algunos resultados positivos, se puede ver por ejemplo el artículo:

A geometric criterion for the finite generation of the Cox rings of projective surfaces, B. De La Rosa, J. B. Frías, M. Lahyane, I. Moreno, O. Osuna, Revista Matemática Iberoamericana, 2015.

Ahora un resultado negativo:

Teorema (Nagata, 1959): M_Z no es finitamente generado si Z consiste de $s = n^2 > 9$ puntos en posición suficientemente general en el plano.

Corolario: El problema 14 de Hilbert tiene una respuesta negativa.

El Problema de la Negatividad Acotada (PNA)

Dada una curva C y puntos $Z = \{p_1, \ldots, p_s\}$, se define:

$$C_Z^2 = (\deg C)^2 - (\mathrm{mult}_C(p_1))^2 - \ldots - (\mathrm{mult}_C(p_s))^2$$

M_Z no es finitamente generado si C_Z^2 puede ser arbitrariamente negativo.

Pregunta Abierta: Para Z fijo, ¿existe una cota b_Z tal que $C_Z^2 \geq b_Z$?

Conjetura de Negatividad Acotada (CNA): Para cada Z existe una cota b_Z tal que $C_Z^2 \geq b_Z$ para todo C.

Pregunta Ingenua: ¿Qué tan negativo puede ser C_Z^2 si variamos Z?

Si C es una línea, y Z es un conjunto de s puntos en C, entonces $C_Z^2 = 1 - s$.

Una Pregunta Más Interesante: ¿Qué tan negativo puede ser C_Z^2/s?

H-constantes

Dada una curva singular C, sea $Z = \{p_1, \dots, p_s\}$ el conjunto de los puntos singulares de C. Ahora definimos

$$H(C) = \frac{C_Z^2}{|Z|} = \frac{C_Z^2}{s}.$$

Pregunta Abierta: ¿Qué tan negativo puede ser $H(C)$?

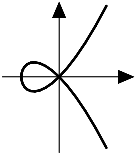
Nota: No es conocida C irreducible con $H(C) \leq -2$.

Hecho: Si $H(C) \geq -2$ para cada C irreducible, entonces CNA es cierta.

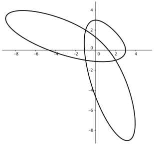
Nota: No es conocida C de cualquier tipo con $H(C) \leq -4$.

H-constantes para C irreducible

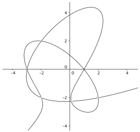
Ejemplos: Existe una curva C_d irreducible de cada grado $d \geq 3$ con $\binom{d-1}{2}$ nodos:



$d = 3$: 1 nodo



$d = 4$: 3 nodos



$d = 5$: 6 nodos

$$H(C_d) = \frac{d^2 - \binom{d-1}{2}2^2}{\binom{d-1}{2}} = -2 + \frac{6d-4}{(d-1)(d-2)} \xrightarrow{d\to\infty} -2$$

Problema Abierto: Encontrar una curva C irreducible con $H(C) \leq -2$, o mostrar que no existen.

Curvas C totalmente reducibles (es decir, uniónes de líneas)

Cuando C es una unión de líneas, los puntos singulares están donde se cruzan las líneas.

La multiplicidad de un punto es el número de líneas que pasan a través del punto.

Una configuración de líneas $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_s\}$ es un conjunto finito de líneas.

$C_{\mathcal{L}} = L_1 \cup \cdots \cup L_s$ $\qquad\qquad$ $\deg C_{\mathcal{L}} = s$

$t_k(\mathcal{L}) = \#$ puntos donde $C_{\mathcal{L}}$ tiene multiplicidad k

el número de puntos singulares $= t_2(\mathcal{L}) + \cdots + t_s(\mathcal{L})$

Nota: $0 \leq t_s(\mathcal{L}) \leq 1$ (se dice que $\mathcal{L}$ es *concurrente* si $t_s(\mathcal{L}) = 1$)

Una identidad combinatoria y los H-constantes para líneas

Hecho: Dada $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_s\}$, si contamos todos los pares de líneas, obtenemos

$$\binom{s}{2} = \binom{2}{2} t_2(\mathcal{L}) + \cdots + \binom{s}{2} t_s(\mathcal{L}) = \sum \binom{k}{2} t_k(\mathcal{L}).$$

Por eso:

$$H(C_{\mathcal{L}}) = \frac{s^2 - \sum k^2 t_k(\mathcal{L})}{\sum t_k(\mathcal{L})} = \frac{s^2 - \sum k^2 t_k(\mathcal{L}) - \left(2\binom{s}{2} - 2\sum \binom{k}{2} t_k(\mathcal{L})\right)}{\sum t_k(\mathcal{L})}$$

$$= \frac{s - \sum k t_k(\mathcal{L})}{\sum t_k(\mathcal{L})} = \frac{s}{\sum t_k(\mathcal{L})} - \overline{k}$$

El teorema de Melchior (1941) para configuraciones de líneas reales

E. Melchior: *Über Vielseite der projektiven Ebene. Deutsche Math., 5 (1941) 461–475*

Teorema: Para una configuración $\mathcal{L}$ de s líneas reales con $t_s = 0$, tenemos la siguiente ecuación:

$$t_2 = 3 + \sum_{k \geq 3} (k-3) t_k + \Delta_L$$

para algún $\Delta_L \geq 0$.

Demostración Topológica: Las líneas dan una decomposición de $\mathbb{RP}^2$ con vértices, bordes y caras. Luego se usa $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$.

H-constantes para configuraciones de líneas reales

Bauer, Di Rocco, Harbourne, Huizenga, Lundman, Pokora, Szemberg: *Bounded Negativity and Arrangements of Lines*, IMRN 2018:

Teorema: Sea $\mathcal{L}$ una configuración de líneas reales. Entonces $H(C_{\mathcal{L}}) > -3$ y existe una secuencia $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots$ de configuraciones de líneas reales tal que $H(C_{\mathcal{L}_n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -3$.

Demostración: Caso 1. Para configuraciones $\mathcal{L}$ de líneas concurrentes, tenemos $H(C_{\mathcal{L}}) = 0$.

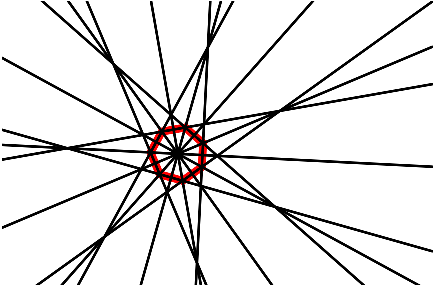
Caso 2. Para configuraciones $\mathcal{L}$ de líneas no concurrentes, se utiliza $\binom{d}{2} - \sum_{k\geq 2} \binom{k}{2} t_k = 0$ y Melchior $t_2 = 3 + \sum_{k\geq 3}(k-3)t_k + \Delta_{\mathcal{L}}$.

$$H(C_{\mathcal{L}}) = \frac{d^2 - \sum_{k\geq 2} t_k k^2}{\sum_{k\geq 2} t_k} = \frac{d^2 - \sum_{k\geq 2} t_k k^2 - 2\left(\binom{d}{2} - \sum_{k\geq 2}\binom{k}{2} t_k\right)}{\sum_{k\geq 2} t_k} = \frac{d - \sum_{k\geq 2} t_k k}{\sum_{k\geq 2} t_k}$$

$$> -\frac{\sum_{k\geq 2} t_k k}{\sum_{k\geq 2} t_k} = -\frac{2(3+\Delta_{\mathcal{L}}) + 3\sum_{k\geq 3} t_k(k-2)}{3 + \Delta_{\mathcal{L}} + \sum_{k\geq 3} t_k(k-2)} > -3$$

Prueba continuada

Para $\mathcal{L}_n$, se toman las $d = 2n$ líneas dadas por los n lados de un n-gon regular con n impar y las n bisectrices angulares.



$\mathcal{L}_7$

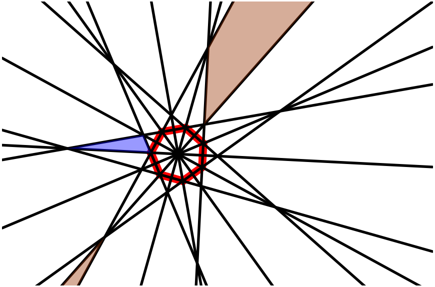
Entonces existen:
$t_2 = n$ puntos de multiplicidad 2,
$t_3 = \binom{n}{2}$ puntos de multiplicidad 3, y
$t_n = 1$ punto de multiplicidad n, dando

$$H(C_{\mathcal{L}_n}) = \frac{d - \sum_{k\geq 2} t_k k}{\sum_{k\geq 2} t_k} = -3 + \epsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} -3.$$

Configuraciones simpliciales de líneas

Es interesante notar que las configuraciones $\mathcal{L}_n$ son simpliciales.

Una configuración $\mathcal{L}$ es *simplicial* si las líneas particionan el plano (el plano projectivo real) en triángulos.



Un resultado analogo sobre $\mathbb{C}$

T. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, J. Huizenga, A. Lundman, P. Pokora, T. Szemberg: *Bounded Negativity and Arrangements of Lines*, IMRN 2018:

Teorema: Sea $\mathcal{L}$ una configuración de líneas complejas. Entonces $H(C_{\mathcal{L}}) > -4$.

Comentario: El $H(C_{\mathcal{L}})$ más negativo conocido es gracias a Anders Wiman, 1896, quien construyó $\mathcal{L}$ con 45 líneas y $t_k = 0$ excepto para:

$t_3 = 120$, $t_4 = 45$ y $t_5 = 36$,

dando $H(C_{\mathcal{L}}) = -\frac{225}{67} \approx -3.36$.

En particular, aquí $t_2 = 0$. ¡Esto no es posible sobre los reales!

Configuraciones de líneas complejas

Problema Abierto: ¿Cuál es el mínimo $H(C_{\mathcal{L}})$ para una configuración $\mathcal{L}$ de líneas complejas? Notamos que el ejemplo de Wiman tiene $t_2 = 0$. ¿Existen configuraciones adicionales de líneas complejas con $t_2 = 0$?

Problema Abierto: Clasificar todas las configuraciones de líneas complejas con $t_2 = 0$.

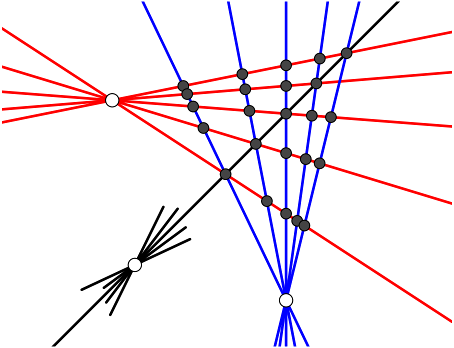
(Si dos líneas son paralelas, consideramos que se cruzan al infinito.)

Sólo cuatro tipos son conocidas:

Configuraciones de líneas complejas con $t_2 = 0$

(1) $d \geq 3$ líneas concurrentes: $t_2 = \cdots = t_{d-1} = 0, t_d = 1$

(2) las configuraciones de Fermat $\mathcal{L}_n$, $n \geq 3$, definidas por los factores de $(x^n - y^n)(x^n - (x+y-1)^n)(y^n - (x+y-1)^n)$; tenemos $d_{\mathcal{L}_n} = 3n, t_3 = n^2, t_n = 3$. Abajo vemos $n = 5$ (los n^2 puntos de mutiplicidad 3 son negros, cada punto en 3 líneas con una línea de cada color; los 3 puntos de multiplicidad n son blancos), pero no es posible mostrar todas las líneas correctamente sobre los reales.



Dos más son conocidas

(3) un ejemplo $\mathcal{L}$ de F. Klein (1879):
$d_{\mathcal{L}} = 21$, $t_3 = 28$, $t_4 = 21$
y $t_k = 0$ por lo demás

(4) y el ejemplo $\mathcal{L}$ de A. Wiman (1896):
$d_{\mathcal{L}} = 45$, $t_3 = 120$, $t_4 = 45$, $t_5 = 36$
y $t_k = 0$ por lo demás

Problemas Abiertos

- ¿Existen otras configuraciones con $t_2 = 0$ sobre $\mathbb{C}$?

- Clasificar configuraciones sobre $\mathbb{R}$ donde t_2 es “pequeño".

- Clasificar las posibilidades para el número d de líneas y los valores de t_k (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Sería muy interesante saber si existen otras configuraciones de líneas complejas con $t_2 = 0$, ya que estos se han vuelto importantes recientemente en Álgebra Conmutativa al estudiar *potencias simbólicas*.

Un otro Problema Abierto

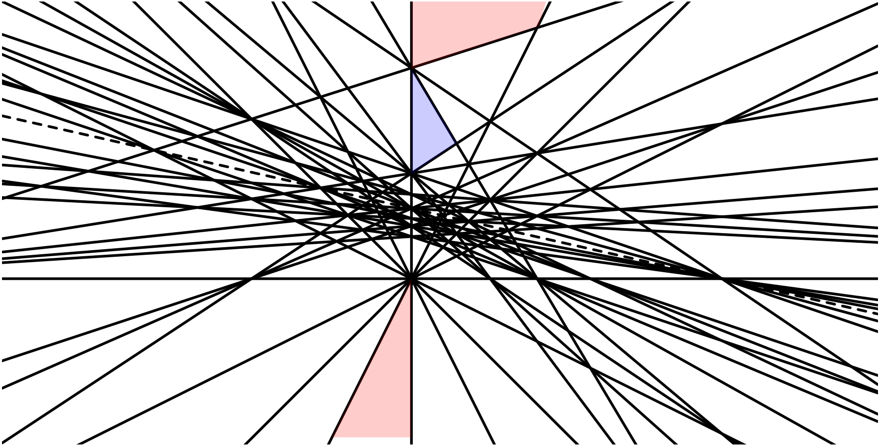
¿Cuál es el mínimo $H(C_{\mathcal{L}})$ para una configuración $\mathcal{L}$ sobre $\mathbb{Q}$?

El valor más mínimo conocido ahora es

$$H(C_{\mathcal{L}}) = \frac{-503}{181} \approx -2.779,$$

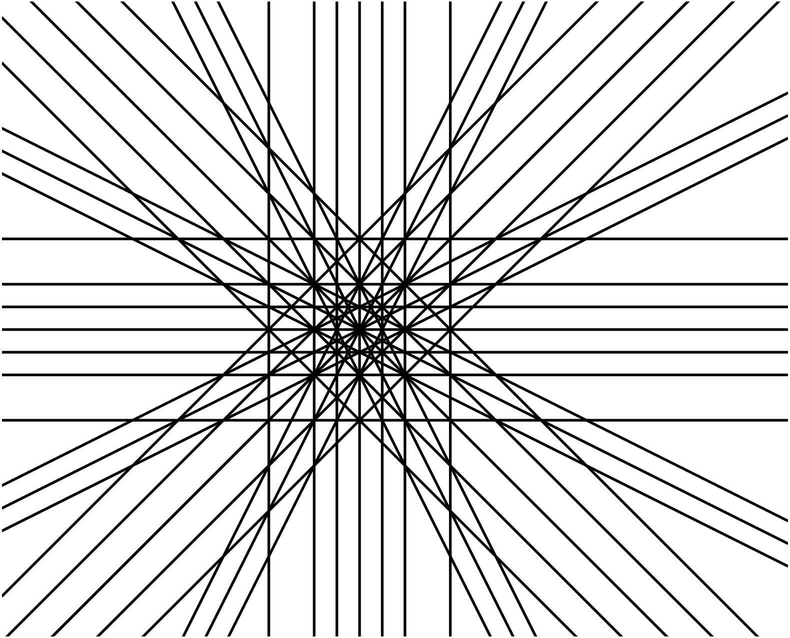
dado por una configuración simplicial de $d = 37$ líneas con $t_2 = 72, t_3 = 72, t_4 = 24, t_6 = 10, t_8 = 3$.

La configuración



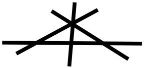
Esto es más facíl de entender si movemos la línea discontinua al infinito:

Una vista differente de la misma configuración



Un Problema Abierto Más

Lo que es conocido son sólo tres familias infinitas de configuraciones simpliciales de líneas reales y luego 41 ejemplos esporádicos, ninguno de estos 41 con más de 37 líneas:



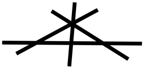
- líneas concurrentes más una línea no concurrente,
- ejemplos basados en n-gons regulares (como antes), y
- ejemplos basados en $2n$-gons regulares con una línea al infinito.

Conjetura B. Grunbaum (Ars Mathematica Contemporanea, 2009): Los ejemplos conocidos actualmente son los únicos.

Pero M. Cuntz (arXiv:1108.3000v1) agregó cuatro nuevos casos con 27 líneas a la lista en 2011...

Un Problema Abierto Más

Lo que es conocido son sólo tres familias infinitas de configuraciones simpliciales de líneas reales y luego 41 ejemplos esporádicos, ninguno de estos 41 con más de 37 líneas:



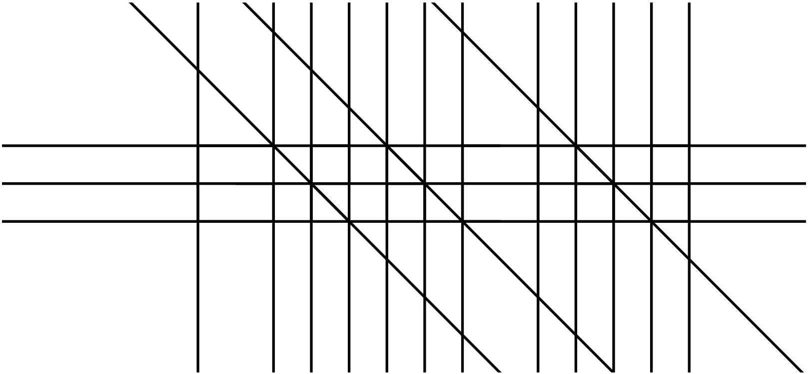
- líneas concurrentes más una línea no concurrente,
- ejemplos basados en n-gons regulares (como antes), y
- ejemplos basados en $2n$-gons regulares con una línea al infinito.

Conjetura B. Grunbaum (Ars Mathematica Contemporanea, 2009): Los ejemplos conocidos actualmente son los únicos.

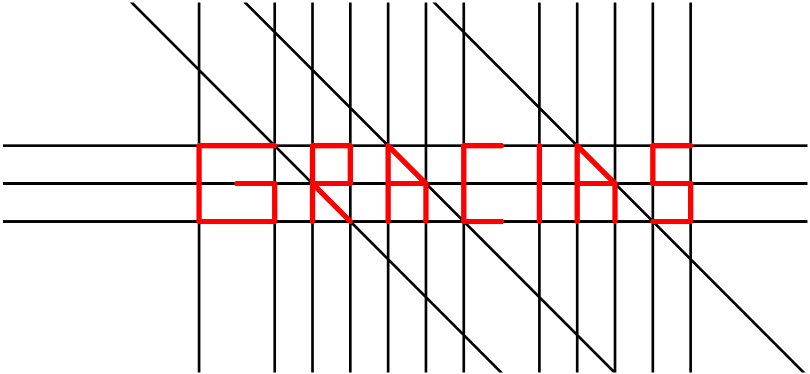
Pero M. Cuntz (arXiv:1108.3000v1) agregó cuatro nuevos casos con 27 líneas a la lista en 2011...

¡Sin embargo, esto no viola la conjetura! Todavía los ejemplos conocidos actualmente son los únicos.

Una cosita más...



Una cosita más...



por su atención