Cómo Napier empoderó a Kepler quien inspiró a Newton a cambiar el mundo

Brian Harbourne

Seminario de Matemáticas
Universidad de Nebraska-Lincoln

17 Febrero 2021

Dramatis personae

John Napier	Johannes Kepler	Isaac Newton
1550-1617	1571-1630	1643-1727



Un problema muy importante en 1590

En 1590, calculaciones astronómicas eran muy difíciles. El problema era la operación de multiplicación.

Nadie sabía nada de logaritmos. En cambio, usaba un método que se llamaba prostaféresis, que utilizó funciones trigonométricas.

Veamos cómo funcionó.

Antes de Napier: prostaféresis

Prostaféresis es un método de convertir la multiplicación en suma, usando una identidad trigonométrica y tablas de valores del coseno.

Básicamente, la identidad es esta:

$$\cos(a)\cos(b) = (1/2)(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

(La única multiplicación es de dividir por dos. También, se necesita una tabla trigonométrica, para obtener los ángulos, dado los valores del coseno, o los valores del coseno, dado los ángulos.)

Aquí es un ejemplo:

$3 * 4 = 100 * (0,3 * 0,4) =$ [ahora usa la tabla]

$100 * \cos(1,266) * \cos(1,159) =$
$(100/2) * (\cos(2,425) + \cos(0,107)) =$

[usa la tabla otra vez] $\frac{100}{2}(-0,754 + 0,994) = \frac{100}{2}0,24 = \frac{24}{2} = 12.$

Una idea mejor

John Napier quería algo mejor. Tuvo la idea para los logaritmos cerca de 1594.

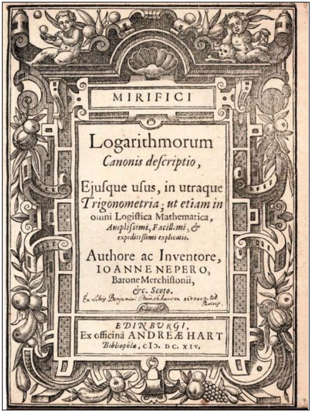
Pero, ¿porqué no era la idea obvia? Hay dos razones.

1. En esos días, no existía el concepto de funciones exponenciales. ¡Las funciones exponenciales no existieron hasta que pasaron 60-100 años más!

2. Aun si la idea de logaritmos hubiera existido, ¿cómo las habrían sido calculadas?

Mirifici logarithmorum canonis descriptio

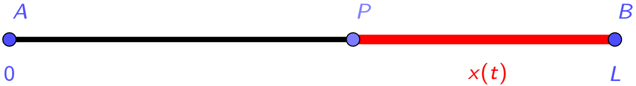
De hecho, le tomó 20 años calcular sus tablas de logaritmos, publicado en 1614 con el título *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, que significa “Descripción de la regla maravillosa de los logaritmos".



¿Cual era el concepto de Napier de los logaritmos?

Napier empezó con un segmento de recta $\overline{AB}$ de longitud $L = 10^7$:

Napier imaginó una partícula P que se mueve a la derecha tal que empieza a 0 con velocidad 1. Sea $x(t)$ la distancia de P desde B como una función del tiempo t.



Para $t > 0$, asumimos que la velocidad de P es x/L. Así, P se mueve siempre más despacio como t aumenta. Nunca llega a B.

Denotamos el logarítmo de Napier por $\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x)$. La definición es que

$$\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x(t)) = t.$$

$\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x(t))$ en notación moderna

Napier no sabía nada de esto, pero nosotros sabemos que tenemos una ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{L}$$

con $x(0) = L$.

Por eso, tenemos la solución $t = L\ln(L) - L\ln(x) = -L\ln(x/L)$, así

$$\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x) = -L\ln(x/L).$$

Ahora hay la pregunta: ¿Es $\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x)$ aditivo por multiplicación?

¡Casi! Hasta una constante:

$$\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(ab) = -L\ln(ab/L) = -L(\ln(a) + \ln(b) - \ln(L)) =$$
$$-L(\ln(a/L) + \ln(b/L) + \ln(L)) = \mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(a) + \mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(b) - L\ln(L)$$
$$\approx \mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(a) + \mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(b) - 161180957.$$

Otra pregunta

¿Cómo calculó Napier valores de su función $\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x)$?

¡Usó el método de Euler, más de 100 años antes del nacimiento de Euler!

Queremos resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{L}$ con $x(0) = L$.

El método de Euler es recursivo. Empezamos con $x_0 = L$, $x_0' = -1$, y definimos la ecuación recursiva:

$$x_{n+1} = x_n + x_n' \Delta t,$$

donde

$$x_n' = \frac{-x_n}{L}.$$

Tomamos $\Delta t = 1$, así $n = t$.

Hagamos una tabla. (Ejercicio: $\lim_{i\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{i}\right)^{-i} = e$.)

La tabla con $\Delta t = 1$

$t_n = n$	x_n	$x_n' = -x_n/L$	$x_{n+1} = x_n + x_n'\Delta t$
0	L	-1	$L\left(1-\frac{1}{L}\right) = L-1$
1	$L\left(1-\frac{1}{L}\right)$	$-\left(1-\frac{1}{L}\right)$	$L\left(1-\frac{1}{L}\right)^2 = L\left(1-\frac{1}{L}\right) - \left(1-\frac{1}{L}\right)$
2	$L\left(1-\frac{1}{L}\right)^2$	$-\left(1-\frac{1}{L}\right)^2$	$L\left(1-\frac{1}{L}\right)^3 = L\left(1-\frac{1}{L}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{L}\right)^2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
t_n	$L\left(1-\frac{1}{L}\right)^{t_n}$	$-\left(1-\frac{1}{L}\right)^{t_n}$	

Por eso, tenemos $t_n = \log_{1-(1/L)}(x_n/L)$; i.e.,

$$-L\ln\left(\frac{x_n}{L}\right) = \mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x_n) \approx \log_{1-\frac{1}{L}}\left(\frac{x_n}{L}\right) = \frac{\ln(x_n/L)}{\ln\left(1-\frac{1}{L}\right)} = \frac{-L\ln(\frac{x_n}{L})}{\ln\left(\left(1-\frac{1}{L}\right)^{-L}\right)}$$

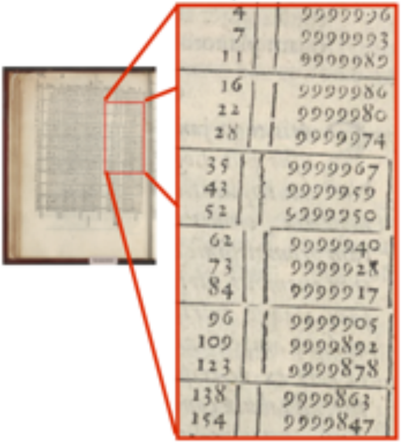
¡Así el cociente de valor estimado por valor exacto es

$$\frac{\log_{1-\frac{1}{L}}\left(\frac{x_n}{L}\right)}{\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x_n)} = \frac{1}{\ln\left(\left(1-\frac{1}{L}\right)^{-L}\right)} = 0.9999999504, \text{ muy cerca de 1!}$$

Comparando valores

$L = 10^7$

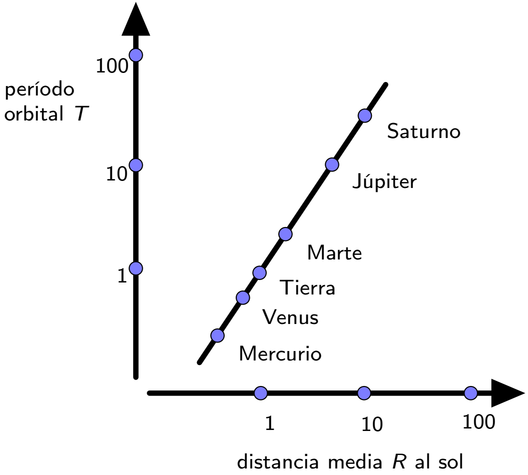
Tabla de Napier



$\mathrm{Log}_{\mathrm{Nap}}(x) = -L\ln(x/L)$	$\log_{1-\frac{1}{L}}\left(\frac{x}{L}\right)$
9999996.000000801	9999996.0000006
9999993.00000245	9999993.0000021
9999989.00000605	9999989.0000055
9999984.0000128	9999984.000012
9999978.0000242	9999978.0000231
9999972.0000392	9999972.0000378
9999965.00006125	9999965.0000595
9999957.00009245	9999957.000090301
9999948.0001352	9999948.0001326
9999938.0001922	9999938.0001891
9999927.00026645	9999927.000262799
9999916.000352798	9999916.0003486
9999904.000460798	9999904.000455998
9999891.000594048	9999891.000588598
9999877.000756446	9999877.000750298
9999862.000952195	9999862.000945296
9999846.001185793	9999846.001178095

La conexión a Kepler

Cuatro años después de la publicación del libro de Napier, Kepler anunció su ley tercera del movimiento planetario, que dice que la gráfica log-log de período orbital T de un planeta contra su distancia media R al sol es una linea con pendiente $3/2$:



Tabulae Rudolphinae y las musas scientíficas

Nadie sabe por cierto, pero parece probable que Kepler usó logaritmos para descubrir su ley tercera.

De todos modos, Kepler creía que el trabajo de Napier fue muy importante. Kepler dedicó su libro *Ephemerides* (1620) a Napier, y después publicó un libro llamado las Tablas rudolfinas (1627) con (como dicen los angloparlantes) un “huevo de Pascua". ¿Dónde está?

Aquí es el frontispicio de las Tablas rudolfinas. ¿Qué vemos?

Debajo del águila Habsburgo, vemos Urania, la musa de la astronomía.

A través de la cima del templo, vemos seis musas más; de izquierda a derecha, vemos las musas de Física lucis, Óptica, Logarítmica, Doctrina triangulorum, Státmica y Magnética.

Mira más de cerca la musa Logarítmica.

La aureola de la musa Logarítmica

La musa sostiene dos palos.

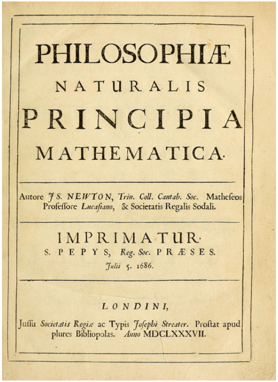
Uno es dos veces más largo que el otro.

En su aureola vemos el numero 6934172.

¡Recuerda que $\ln 2 = 0,6931472$!

Por fin, hay Isaac Newton.

Las tres leyes de Kepler del movimiento de los planetas inspiró a Newton a inventar la cálculus y escribir la Principia Matemática para probar las 3 leyes, y de este modo, ayudó a desarrollar el mundo moderno.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Mucha gente piensa que el Descripcio de Napier, en su día, fue tan importante como la Principia de Newton.

Bibliografía

Mirifici logarithmorum canonis descriptio: Napier, 1614 (haga clic aquí)

Dedicación de Kepler a Napier en Ephemerides, 1620 (haga clic aquí)

Tablas rudolfinas: Kepler, 1627 (haga clic aquí)

Principia Matemática: Newton, 1687 (haga clic aquí)